Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Estudios Matemáticos
Nivel Medio
Prueba 2

Martes 19 de noviembre de 2019 (mañana)

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Para esta prueba, se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Estudios Matemáticos NM**.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

8819 – 7410

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar un gráfico de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujarlo aproximadamente en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 15]

El restaurante Casanova tiene un menú del día en el que el cliente elige **uno** de los siguientes platos: pasta, pescado o marisco.

El encargado hizo una encuesta a 150 clientes y fue anotando la edad del cliente y el plato que había elegido. Los datos se muestran en la siguiente tabla.

	Pasta	**Pescado**	**Marisco**	**Total**
Adultos	24	25	32	81
Niños	20	14	35	69
Total	44	39	67	150

Se realizó una prueba χ^2 a un nivel de significación del 10%. El valor crítico para esta prueba es $4{,}605$.

(a) Indique cuál es la hipótesis nula, H_0, para esta prueba. [1]

(b) Escriba el número de grados de libertad. [1]

(c) Muestre que el número esperado de niños que eligieron marisco es 31, redondeando a dos cifras significativas. [2]

(d) Escriba

(i) El estadístico χ^2;

(ii) El valor del parámetro p. [3]

(e) Indique la conclusión que se puede extraer de esta prueba. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

(f) Se escoge un cliente al azar.

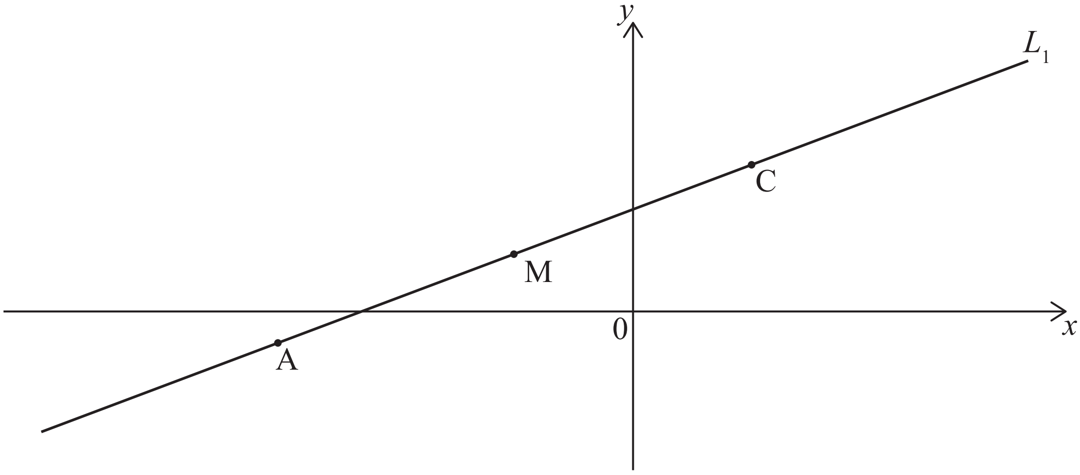
(i) Calcule la probabilidad de que el cliente sea un adulto.

(ii) Calcule la probabilidad de que el cliente sea un adulto o de que el cliente haya elegido marisco.

(iii) Sabiendo que el cliente es un niño, calcule la probabilidad de que haya elegido pasta o pescado. [6]

2. [Puntuación máxima: 13]

La siguiente figura muestra la recta L_1. Los puntos $\mathrm{A}(-9, -1)$, $\mathrm{M}(-3, 2)$ y C pertenecen a L_1.



(a) Halle la pendiente de L_1. [2]

M es el punto medio de AC.

(b) Halle las coordenadas del punto C. [2]

La recta L_2 es perpendicular a L_1 y pasa por el punto M.

(c) Halle la ecuación de L_2. Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde a, b, $d \in \mathbb{Z}$. [3]

El punto $\mathrm{N}(k, 4)$ pertenece a L_2.

(d) Halle el valor de k. [2]

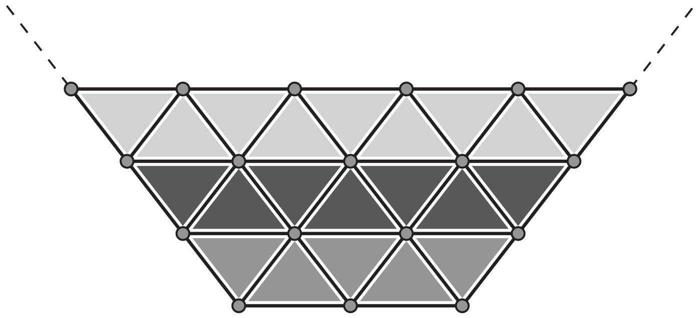
(e) Halle la distancia que hay entre los puntos M y N. [2]

(f) Sabiendo que la longitud de AM es $\sqrt{45}$, halle el área del triángulo ANC. [2]

3. [Puntuación máxima: 15]

Maegan diseña una vidriera decorativa para la fachada de un nuevo Centro de Bellas Artes. La vidriera está hecha de pequeños paneles triangulares. Los tres **primeros** niveles de la vidriera se muestran en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



El $1.^{\text{er}}$ nivel —el de la parte inferior de la vidriera— consta de 5 paneles triangulares. En el $2.^{\text{o}}$ nivel hay 7 paneles triangulares y en el $3.^{\text{er}}$ nivel hay 9 paneles triangulares. Cada nivel adicional tiene 2 paneles triangulares más que el nivel que está debajo de él.

(a) Halle el número de paneles triangulares que habrá en el $12.^{\text{o}}$ nivel. [3]

(b) Muestre que el número total de paneles triangulares, S_n, que hay en los primeros n niveles viene dado por:

$$S_n = n^2 + 4n\,.$$ [3]

(c) **A partir de lo anterior**, halle el número total de paneles que habrá en una vidriera de 18 niveles. [2]

Maegan tiene 1000 paneles triangulares para construir la vidriera y no quiere dejar incompleto ningún nivel.

(d) Halle el número máximo de niveles **completos** que podrá hacer Maegan. [3]

El área de cada panel triangular es igual a $1{,}84\,\mathrm{m}^2$.

(e) Halle el área **total** que tendrá la vidriera si se construye con ese número máximo de niveles completos. Exprese el área que ha hallado redondeando al m^2 más cercano. [4]

4. [Puntuación máxima: 16]

El gráfico de la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+8)$ corta al eje y en $(0, c)$.

(a) Halle el valor de c. [2]

El vértice de la función es $(-3; -12{,}5)$.

(b) Escriba la ecuación del eje de simetría del gráfico. [2]

La ecuación $f(x) = 12$ tiene dos soluciones. La primera solución es $x = -10$.

(c) **Utilice la simetría** del gráfico para mostrar que la segunda solución es $x = 4$. [1]

(d) Escriba las intersecciones con el eje x del gráfico. [2]

(e) En papel milimetrado, dibuje con precisión el gráfico de $y = f(x)$ para $-10 \le x \le 4$ y $-14 \le y \le 14$. Utilice una escala de $1\,\mathrm{cm}$ para representar 1 unidad en el eje x y $1\,\mathrm{cm}$ para representar 2 unidades en el eje y. [4]

Sea T la tangente en $x = -3$.

(f) (i) Escriba la ecuación de T.

(ii) En el mismo gráfico, dibuje con precisión la tangente T. [3]

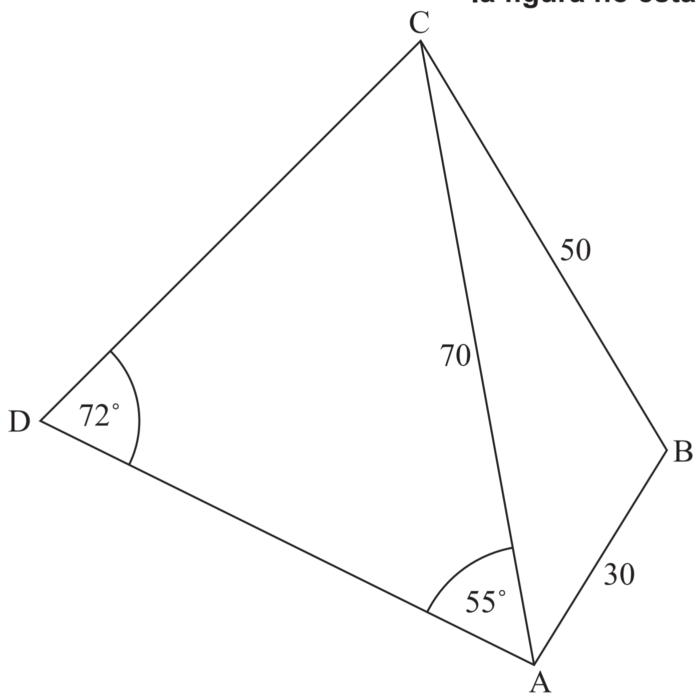
(g) Sabiendo que $f(a) = 5{,}5$ y que $f'(a) = -6$, indique si la función f es creciente o decreciente en $x = a$. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

5. [Puntuación máxima: 15]

Haraya posee dos terrenos que tienen forma triangular: ABC y ACD. AB mide $30\,\mathrm{m}$ de longitud, BC mide $50\,\mathrm{m}$ y AC mide $70\,\mathrm{m}$. El ángulo $\mathrm{D\hat{A}C}$ mide 55° y $\mathrm{A\hat{D}C}$ mide 72°.

La siguiente figura muestra toda esta información.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle la longitud de AD. [4]

(b) Halle el valor de $\mathrm{A\hat{B}C}$. [3]

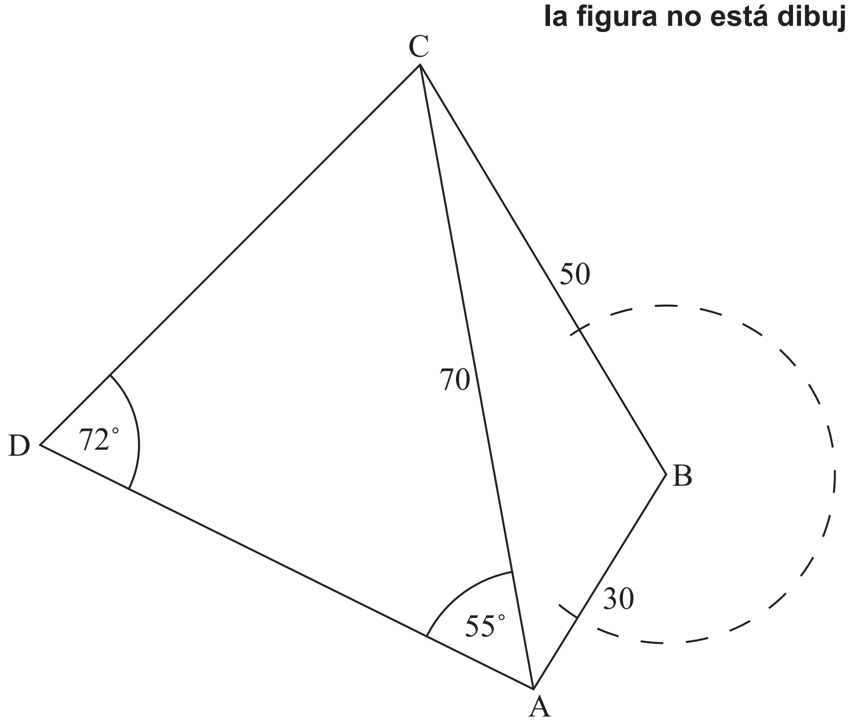
(c) Calcule el área del terreno triangular ABC. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

Haraya ata una cuerda de $20\,\mathrm{m}$ de largo a un poste vertical que se encuentra en el punto B.

la figura no está dibujada a escala

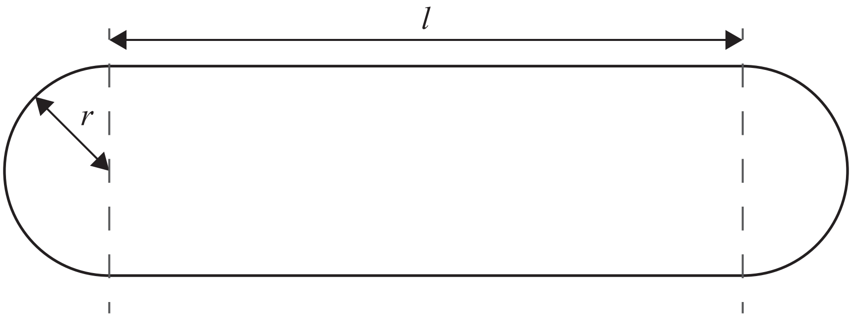


(d) Determine si la cuerda llega hasta el interior del terreno triangular ACD. Justifique su respuesta. [5]

6. [Puntuación máxima: 16]

La empresa Maxwell Ohm Company está diseñando un altavoz Bluetooth portátil. El altavoz tiene forma de cilindro con una semiesfera en cada uno de los extremos del cilindro.

En la siguiente figura se muestran las dimensiones del altavoz en centímetros; r es el radio de la semiesfera y l es la longitud del cilindro, siendo $r > 0$ y $l \geq 0$.



(a) Escriba una expresión para V, el volumen del altavoz en cm^3, en función de r, l y π. [2]

La empresa Maxwell Ohm Company ha decidido que el altavoz tendrá una superficie de $300\,\text{cm}^2$.

(b) Escriba una ecuación que permita calcular la superficie del altavoz en función de r, l y π. [3]

(c) Teniendo en cuenta que el diseño ha de cumplir que $l = \dfrac{150 - 2\pi r^2}{\pi r}$, muestre que $V = 150r - \dfrac{2\pi r^3}{3}$. [2]

(d) Halle $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$. [2]

La calidad de sonido del altavoz mejora a medida que V aumenta.

(e) Utilizando la respuesta que dio en el apartado (d), muestre que V es máximo cuando r es igual a $\sqrt{\dfrac{75}{\pi}}\,\text{cm}$. [2]

(f) Halle la longitud del **cilindro** para la cual V es máximo. [2]

(g) Calcule el valor máximo de V. [2]

(h) Utilice la respuesta que dio en el apartado (f) para identificar la forma del altavoz con la que se obtiene la mejor calidad de sonido. [1]